Dimensão de subespaços

Álgebra Linear – Videoaula 7

Luiz Gustavo Cordeiro

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Convenção

Todos os espaços vetoriais aqui têm dimensão finita.

Qual a dimensão do espaço nulo?

- Qual a dimensão de $\{0_V\}$?
- Qual é uma base? O conjunto vazio, $\varnothing$!
- $\varnothing$ é LI. ✓
- $\langle \varnothing \rangle = \{0_V\}$. ✓

Comparação básica

Teorema

Se W é um subespaço de V, então

1. $\dim(W) \leq \dim(V)$.
2. *W é próprio se, e somente se,* $\dim(W) < \dim(V)$.

Seja $\mathcal{C}$ base de W. Então $\mathcal{C}$ é LI. Daí existe base $\mathcal{B}$ de V com $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

1. $\dim(W) = \#\mathcal{C} \leq \#\mathcal{B} = V$
2. $(\Rightarrow)$ Se W é próprio então $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$ (pois $\mathcal{C}$ gera W), logo

$$\dim(W) = \#\mathcal{C} < \#\mathcal{B} = \dim(V).$$

   $(\Leftarrow)$ (contra-positiva) Se W não é proprio, então $W = V$ e $\dim(W) = \dim(V)$.

Dimensão de somas de subespaços

Teorema (Princípio da Inclusão e Exclusão Linear)

Sejam X e Y subespaços de V. Então

$$\dim(X+Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y).$$

Teorema (Princípio da Inclusão e Exclusão)

Se A, B são conjuntos, então

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B).$$

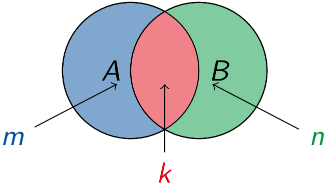
Dimensão de somas de subespaços

A intuição

Teorema

Se A, B são conjuntos, então

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B).$$



$$\begin{aligned}\#(A \cup B) &= m + k + n \\ &= (m + k) + (n + k) - k \\ &= \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)\end{aligned}$$

Sejam

- $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_k\}$ base de $X \cap Y$
- $\mathcal{A}$ base de X contendo $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{A} = \{z_1, \ldots, z_k, x_1, \ldots, x_m\}$$

- $\mathcal{B}$ base de Y contendo $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{B} = \{z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_n\}.$$

Vamos verificar que $\mathcal{C} = \{z_1, \ldots, z_k, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ é base de $X + Y$.

- <u>$\mathcal{C}$ é gerador de $X + Y$</u>:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{C} \rangle &= \langle \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rangle \\ &= \langle \mathcal{A} \rangle + \langle \mathcal{B} \rangle \\ &= X + Y, \end{aligned}$$

- $\mathcal{C}$ é LI: Suponha

$$\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_k z_k + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \gamma_1 y_1 + \cdots + \gamma_n y_n = 0_V$$

i.e.

$$\sum_i \alpha_i z_i + \sum_j \beta_j x_j + \sum_k \gamma_k y_k = 0_V$$

Então

$$\underbrace{\sum_i \alpha_i z_i}_{\in (X \cap Y)} + \underbrace{\sum_j \beta_j x_j}_{\in X} = -\underbrace{\sum_k \gamma_k y_k}_{\in Y} \in X \cap Y$$

$$\sum_i \alpha_i z_i + \sum_j \beta_j x_j = -\sum_k \gamma_k y_k \in X \cap Y$$

Como $\mathcal{Z} = \{z_1, \ldots, z_k\}$ é base de $X \cap Y$:

$$\sum_i \alpha_i z_i + \sum_j \beta_j x_j = \sum_i \delta_i z_i + \sum_j 0 x_j$$

Como $\mathcal{A} = \{z_1, \ldots, z_k, x_1, \ldots, x_m\}$ é base de X,

$$\beta_j = 0 \text{ para todo } j$$

Dimensão de somas de subespaços
A prova

Por hipótese,

$$\sum_i \alpha_i z_i + \sum_j \beta_j x_j + \sum_k \gamma_k y_k = 0_V$$

ou seja,

$$\sum_i \alpha_i z_i + \sum_k \gamma_k y_k = 0_V$$

Como $\mathcal{B} = \{z_1, \ldots, z_k, y_1, \ldots, y_n\}$ é base de Y, temos também

$$\alpha_i = \gamma_k = 0 \text{ para todos } i, k.$$

Isso mostra que a única solução de

$$\sum_i \alpha_i z_i + \sum_j \beta_j x_j + \sum_k \gamma_k y_k = 0_V$$

é $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = 0$ para todos i, j, k.
Portanto $\mathcal{C} = \{z_1, \ldots, z_k, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ é LI.

Então $\mathcal{C}$ é LI e gerador de $X + Y$, i.e., uma base. Por construção:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \{z_1, \dots, z_k\} \\
\mathcal{A} &= \{z_1, \dots, z_k, x_1, \dots, x_m\} \\
\mathcal{B} &= \{z_1, \dots, z_k, y_1, \dots, y_n\} \\
\mathcal{C} &= \{z_1, \dots, z_k, x_1, \dots, x_m, x_1, \dots, x_n\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dim(X \cap Y) &= \#\mathcal{Z} = k \\
\dim(X) &= \#\mathcal{A} = k + m \\
\dim(Y) &= \#\mathcal{B} = k + n \\
\dim(X + Y) &= \#\mathcal{C} = k + m + n
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dim(X \cap Y) &= k \\
\dim(X) &= k + m \\
\dim(Y) &= k + n \\
\dim(X + Y) &= k + m + n
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
\dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y) &= (k + m) + (k + m) - k \\
&= k + m + n \\
&= \dim(X + Y).
\end{aligned}
$$

Para conjuntos:

$$
\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) = & \#A + \#B + \#C \\
& - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) \\
& + \#(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$

Importante

Aqui acaba a analogia com conjuntos. A fórmula análoga à acima para dimensão não vale.

Se $X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$ e $Z = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, então

$$\dim(X + Y + Z) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

mas

$$\begin{array}{ccc} \dim(X) + \dim(Y) + \dim(Z) & & 1+1+1 \\ -\dim(X \cap Y) - \dim(X \cap Z) - \dim(Y \cap Z) & = & -0-0-0 \\ +\dim(X \cap Y \cap Z) & & +0 \\ & = & 3 \end{array}$$

Sejam

$$U = \langle \{(1, -8, 1, -10), (2, -8, 1, -11)\} \rangle$$

e V o espaço solução de

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & 2y & + & 2z & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \end{array} \right.$$

Então

- $\dim(U) = 2$ (gerado por dois vetores LI)
- $\dim(V) = 2$, pois a forma paramétrica da solução geral do sistema é

$$(x, y, z, w) = z(-1, -1, 1, 0) + w(-1, 0, 0, 1)$$

Quais são $\dim(U + V)$ e $\dim(U \cap V)$?

$$U = \langle\{(1,-8,1,-10),(2,-8,1,-11)\}\rangle$$

$$V = \text{Esp. Sol.}\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & 2y & + & 2z & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$
$$= \langle\{(-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}\rangle$$

Então

$$U + V = \langle\{(1,-8,1,-10),(2,-8,1,-11),(-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}\rangle$$

$$U + V = \langle\{(1,-8,1,-10),(2,-8,1,-11),(-1,-1,1,0),(-1,0,0,1)\}\rangle$$

Temos que

$$\mathrm{FormaEscalonada}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & -8 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -10 & -11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mas que

$$\mathrm{FormaEscalonada}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -8 & -8 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -10 & -11 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $\{(1,-8,1,-10),(2,-8,1,-11),(-1,-1,1,0)\}$ é base de $U+V$, logo

$$\dim(U+V)=3.$$

Como

$$\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)$$

então

$$\begin{aligned}\dim(U\cap V)&=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U+V)\\&=2+2-3\\&=1.\end{aligned}$$

$$U = \langle \{(1,-8,1,-10),(2,-8,1,-11)\} \rangle$$

$$V = \text{Esp. Sol.} \left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & 2y & + & 2z & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & w & = & 0 \end{array} \right.$$

Os vetores v de $U \cap V$ são os da forma a forma

$$\begin{aligned} v &= x(1,-8,1,-10) + y(2,-8,1,-11) \\ &= (x+2y, -8x-8y, x+y, -10x-11y) \end{aligned}$$

para os quais

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & 2(-8x-8y) & + & 2(x+y) & & & = & 0 \\ (x+2y) & + & 2(-8x-8y) & + & 3(x+y) & + & (-10x-11y) & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} & 2(-8x-8y) & + & 2(x+y) & & & = & 0 \\ (x+2y) & + \; 2(-8x-8y) & + & 3(x+y) & + & (-10x-11y) & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -14x & - & 14y & = & 0 \\ -22x & - & 22y & = & 0 \end{cases}$$

A solução geral é $x = -y$.

Isso mostra que os vetores de $U \cap V$ são os da forma

$$\begin{aligned} v &= x(1,-8,1,-10) + y(2,-8,1,-11) \\ &= x(1,-8,1,-10) - x(2,-8,1,-11) \\ &= x(-1,0,0,1) \end{aligned}$$

Dimensão de soma de subespaços

Um exemplo; segundo modo

$$U \cap V = \langle \{(-1, 0, 0, 1)\} \rangle.$$

Portanto $\dim(U \cap V) = 1$, e

$$\begin{aligned} \dim(U + V) &= \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V) \\ &= 2 + 2 - 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$